GUÍA DE ESTUDIO PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO ENERO 2026
PENSAMIENTO MATEMÁTICO III
SEPTIEMBRE 2025 - ENERO 2026

PROFESOR: Eduardo Tututi Guillén **FECHA: ________________________**

ESTUDIANTE: ____ GRUPO: ________________________

VALOR: La Guía de Estudios tiene un valor del 40% y derecho a Examen **CALIFICACIÓN: ____________________**

GUÍA DE ESTUDIO PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

1. Operaciones con funciones

Las **operaciones con funciones** son operaciones matemáticas que se realizan sobre las funciones ya definidas. Al aprender estas operaciones, es esencial entender cómo combinar funciones de manera coherente y cómo se afectan mutuamente. Las operaciones comunes con funciones incluyen:

- **Suma de funciones**
- **Resta de funciones**
- **Multiplicación de funciones**
- **División de funciones**
- **Composición de funciones**

1.1 Suma de funciones

La **suma de funciones** consiste en sumar dos funciones $f(x)$, $g(x)$. La operación se realiza punto por punto.

- **Fórmula**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$, entonces:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + (2x+1) = x^2 + 2x + 1$$

1.2. Resta de funciones

La **resta de funciones** consiste en restar una función $g(x)$ de una función $f(x)$.

- **Fórmula**: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x + 2$, entonces:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 3x) - (x + 2) = x^2 + 3x - x - 2 = x^2 + 2x - 2$$

1.3. Multiplicación de funciones

La **multiplicación de funciones** consiste en multiplicar dos funciones $f(x)$, $g(x)$

- **Fórmula**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$, entonces:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+1)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$$

4. División de funciones

La **división de funciones** implica dividir una función $f(x)$ por otra función $g(x)$, siempre que $g(x) \neq 0$.

- **Fórmula**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2 + 1$(x), $g(x) = x - 1$ entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{x}^2 + 1}{\mathrm{x} - 1}, g \neq 1$$

Nota: Es importante asegurarse de que el denominador $g(x)$ no sea igual a cero, ya que no se puede dividir entre cero.

5. Composición de funciones

La **composición de funciones** implica aplicar una función a los resultados de otra función. Si tienes dos funciones $f(x)$, $g(x)$, la composición de f, g se denota como $f \circ g$.

- **Fórmula**: $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 1$, entonces:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x+1) = (3x+1)^2 = (3x+1)(3x+1) = 9x^2 + 3x + 3x + 1$$
$$= 9x^2 + 6x + 1$$

Nota: El orden de la composición es importante. En $f \circ g$, primero se aplica $g(x)$ luego $f(x)$ al resultado de $g(x)$.

6. Ejercicios prácticos

1. Si $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x^2 + 4$, encuentra:
   - $(f + g)(x) =$
   - $(f - g)(x) =$
   - $(f \cdot g)(x) =$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$
   - $(f \circ g)(x) =$

2. Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$, encuentra:
   - $(f + g)(x) =$
   - $(f - g)(x) =$
   - $(f \cdot g)(x) =$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$
   - $(f \circ g)(x) =$

3. Si $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x + 2$, encuentra:
   - $(f + g)(x) =$
   - $(f - g)(x) =$
   - $(f \cdot g)(x) =$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$
   - $(f \circ g)(x) =$

2. Límites

2.1. ¿Qué es un límite?

Un **límite** es el valor al que se aproxima una función $f(x)$ cuando x se acerca a un número a. Matemáticamente, se define como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esto significa que cuando x se acerca a a, los valores de $f(x)$ se acercan al número L.

2.2. Técnicas básicas para evaluar límites

Existen varias maneras de evaluar límites. Las técnicas más comunes son:

2.2.1. Evaluación directa

Cuando la función es continua en el punto al que x se acerca, se puede simplemente sustituir $x = a$ en la función. Es el caso más sencillo.

- **Ejemplo**:

  Para evaluar $\underset{x \to 2}{lim}(3x + 4)$, simplemente sustituimos $x = 2$:

$$\underset{x \to 2}{lim}(3x + 4) = 3(2) + 4 = 6 + 4 = 10$$

2.2.2. Sustitución directa fallida: Forma indeterminada $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Si al evaluar el límite directamente, obtenemos una **forma indeterminada** como $\frac{0}{0}$, debemos usar otras técnicas, ya que la evaluación directa no proporciona un valor claro.

2.3. Límites de la forma $\frac{0}{0}$

Cuando al evaluar un límite obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, significa que tanto el numerador como el denominador tienden a cero, y necesitamos realizar una simplificación para poder calcular el límite.

2.3.1. Factorización (para límites de la forma $\frac{0}{0}$)

La **factorización** es uno de los métodos más comunes para resolver límites de la forma $\frac{0}{0}$. En muchos casos, al factorizar el numerador o el denominador (o ambos), podemos cancelar términos y simplificar la expresión.

- **Ejemplo 1 (factorización por el método de diferencia de cuadrados):**

  Evaluar $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$.

  Primero, intentamos la evaluación directa:

$$\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

  Como tenemos una forma indeterminada, factorizamos el numerador:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

  Entonces, la expresión se convierte en:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

  Cancelamos el factor $(x-1)$ (siempre y cuando $x \neq$ y obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

- **Ejemplo 2 (Factorización por una constante)**

  Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{3x-12}{x-4}\right)$$

Paso 1: Evaluación directa

Intentamos sustituir $x = 4$ directamente:

$$\frac{3(4)-12}{4-4} = \frac{12-12}{0} = \frac{0}{0}$$

Esto da como resultado una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo cual nos indica que debemos factorizar la expresión en el numerador.

Paso 2: Factorización por constante

El numerador tiene un factor común. Extraemos 3 del numerador:

$$3x + 12 = 3(x-4)$$

Por lo tanto, el límite se convierte en:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{3(x-4)}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4} 3 = 3$$

- **Ejemplo 3 (Factorización de la forma $(\boldsymbol{x+a})(\boldsymbol{x-b})$)**

  Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x-1}\right)$$

Paso 1: Evaluación directa

Primero, intentamos evaluar el límite sustituyendo $x = 1$ directamente en la expresión:

$$\frac{1^2-3(1)+2}{1-1} = 1 - 3 + \frac{1-3+2}{0} = \frac{0}{0}$$

Obtenemos una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo que indica que necesitamos factorizar el numerador para poder simplificar la expresión.

Paso 2: Factorización del numerador

Ahora, vamos a factorizar el trinomio $x^2 - 3x + 2$. Buscamos dos números que multiplicados den $+2$ (el término constante) y sumados den -3 (el coeficiente de x).

Los dos números que cumplen estas condiciones son -1 y -2. Por lo tanto, podemos factorizar el trinomio de la siguiente forma:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Paso 3: Sustitución en la expresión original

Sustituimos la factorización en el límite original:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\right)$$

Paso 4: Cancelación de factores

Ahora podemos cancelar el factor $(x-1)$ en el numerador y el denominador (recordando que no podemos dividir por cero, así que $x \neq 1$:

$$\lim_{x\to 1}(x-2) = 1-2 = 1$$

2.4. Límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando al evaluar un límite obtenemos la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, significa que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito, y necesitamos realizar una simplificación para poder calcular el límite.

2.4.1 Multiplicar por 1/(x elevado a la potencia de mayor valor del límite) en el numerador y el denominador (para Límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$)

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{x^2-x}$$

Paso 1: Evaluación directa

Si $x \to \infty$, numerador $\to \infty$ y denominador $\to \infty \Rightarrow$ forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Paso 2: Multiplicación por 1/(potencia mayor):

El mayor exponente es x^2. Multiplicamos por $\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$(equivalente a dividir numerador y denominador por x^2):

$$\frac{3x^2+5x}{x^2-x}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{3+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Paso 3: Sustitución en la expresión simplificada:

Ahora sustituimos $x \to \infty$en $\frac{3+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}}$.

Paso 4: Analizar término a término:

$\frac{5}{x} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{3+0}{1-0} = 3.$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x}{5x^3 + 4}$$

Paso 1: Evaluación directa

Numerador $\to \infty$, denominador $\to \infty \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$.

Paso 2: Multiplicación por 1/(potencia mayor)

Mayor exponente x^3. Dividimos por x^3:

$$\frac{2x^3 - x}{5x^3 + 4} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{4}{x^3}}.$$

Paso 3: Sustitución en la expresión simplificada

Sustituimos $x \to \infty$ en $\frac{2-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{4}{x^3}}$.

Paso 4: Analizar término a término

$\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{4}{x^3} \to 0$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{4}{x^3}} = \frac{2}{5}.$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x}{x^5 - x^2}$$

Paso 1: Evaluación directa

Numerador $\to \infty$, denominador $\to \infty \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$.

Paso 2: Multiplicación por 1/(potencia mayor)

Ahora la mayor potencia entre numerador y denominador es x^5(aparece en el denominador). Dividimos numerador y denominador por x^5(equivalente a multiplicar por $\frac{1/x^5}{1/x^5}$):

$$\frac{x^4 + x}{x^5 - x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^3}}.$$

Paso 3: Sustitución en la expresión simplificada

Sustituimos $x \to \infty$ en $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^3}}$.

Paso 4: Analizar término a término

$\frac{1}{x} \to 0,\ \frac{1}{x^4} \to 0, \frac{1}{x^3} \to 0$. Por tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0.$$

2.5. Ejercicios Prácticos

- $\lim_{x\to 3}(3x^2 - 2x + 1) =$
- $\lim_{x\to 3}(2x^2 - 5x + 1) =$
- $\lim_{x\to -2}(x^3 + 4x - 7) =$
- $\lim_{x\to 1}\left(5\sqrt{x}+3\right) =$
- $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2}{x}+6\right) =$
- $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right) =$
- $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{4x-8}\right) =$
- $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\right) =$
- $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right) =$
- $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right) =$
- $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4x^3-2x}{3x^3+7}\right) =$
- $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x^2+8x-1}{2x^2-9}\right) =$
- $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^4-3x}{6x^4+2x^2}\right) =$
- $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{7x^5+x^2-10}{x^5-4x}\right) =$
- $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x^6+x}{9x^7-3}\right) =$

3. Derivación

3.1. Concepto de Derivada

La **derivada** de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ mide la tasa de cambio de $f(x)$ con respecto a x en ese punto. Es el límite de la razón de cambio promedio a medida que x se aproxima a a. Matemáticamente, se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva de $f(x)$ en el punto x.

3.2. Reglas Básicas de Derivación

3.2.1. Derivada de una constante

Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces:

$$f'(x) = 0$$

Ejemplo:

$$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$$

3.2.2. Derivada de x

Si $f(x) = x$, entonces:

$$f'(x) = 1$$

Ejemplo:

$$f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$$

3.2.3. Derivada de una potencia de $\boldsymbol{x}$

Si $f(x) = x^n$, donde n es cualquier número real, entonces:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

3.2.4. Derivada de una constante multiplicada por una función

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, donde c es una constante, entonces:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

3.3. Reglas de Derivación Avanzadas

3.3.1 Regla de la suma y resta

Si $f(x) = g(x) \pm h(x)$, entonces:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 2x + 3$$

3.3.2. Regla del Producto

Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, entonces:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 \cdot (x^2 + 3x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot (x^2 + 3x) + x^2 \cdot (2x + 3)$$

3.3.3. Regla del Cociente

Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde $h(x) \neq 0$, entonces:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left(h\,(x)\right)^2}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

3.3.4. Derivadas de Funciones Compuestas (Regla de la Cadena)

La **regla de la cadena** se utiliza cuando tenemos una función dentro de otra. Si $f(x) = g(h(x))$, entonces:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = (3x^2 + 2x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(3x^2 + 2x)^2(6x + 2) = (18x + 6)(3x^2 + 2x)^2$$

3.4. Ejercicios prácticos

a) $f(x) = 9\pi$
b) $f(x) = \sqrt{8}x$
c) $f(x) = x^{100}$
d) $f(x) = 30x^{10}$
e) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$
f) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 4x + 9$
g) $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{x} + 8x^4$
h) $f(x) = (4x^3 + 5x^2)(6x - 7)$
i) $f(x) = (3x^2 + 1)(x^3 - 4)$
j) $f(x) = x^2\,(3x^4 + 2x^2)$
k) $f(x) = \frac{6x-5}{4x+3}$
l) $f(x) = \frac{3x^2-5}{x+4}$
m) $f(x) = \frac{x^3+2x}{2x-1}$
n) $f(x) = (5x^2 - 3)^4$
o) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 7x}$

4.Teoría

- Notación de Newton: Si x= $x(t)$ la primera derivada es $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.
- Notación de Leibniz: Si $y = f(x)$ la primera derivada es $y' = f'(x)$.
- Definición de Función: Es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento llamado $f(x)$, de un conjunto E.
- Recta tangente: Es una recta que toca a la curva en un solo punto llamado punto de tangencia.
- Pendiente: $\boldsymbol{m} = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}}$
- Definición de derivada: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$